وزارة التعليم العالي
جامعة البعث
كلية العلوم - قسم الرياضيات

الامتحان النهائي
مقرر تحليل (2) السنة الأولى رياضيات
الفصل الثاني لعام 2012-2013 م

الاسم:
الدرجة: 100
المدة: ساعتان

أجب عن الأسئلة الآتية :

السؤال الأول (24 درجة) (أ) احسب التكامل الآتي : $I_1 = \int \frac{x^2 dx}{(x^2+1)^2}$

(ب) احسب التكامل الآتي : $|x| \le a$, $I_2 = \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$

واستخدم النتيجة لحساب التكامل : $I_3 = \int \sqrt{3 - 4x^2}\, dx$

السؤال الثاني (36 درجة) احسب التكاملات الآتية :

$$\int \frac{dx}{1 + ch^2 x} \quad , \quad \int \frac{e^{2x} + 3e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx \quad , \quad \int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x} dx \quad , x > 0$$

السؤال الثالث (26 درجة) : حدد طبيعة التكاملات المعتلة الآتية :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x + 4x^3}} \quad , \quad \int_0^{\infty} e^{-x} \cos x\, dx$$

السؤال الرابع : (14 درجة) : احسب مساحة المنحني المعطى بمعادلات الآتية :

$$x = 2\cos^3 t \quad , \quad y = 2\sin^3 t \quad , 0 \le t \le 2\pi$$

انتهت الأسئلة
مع تمنياتي بالتوفيق والنجاح

أستاذ المقرر:
د.منير مخلوف

حمص في 2013/6/13



جامعة دمشق — سلم تصحيح امتحان مقرر تحليل رياضي / — الدرجة ...

كلية العلوم – قسم الرياضيات — الفصل الثاني لعام ٢٠١٢ – ٢٠١٣

السنة الأولى رياضيات

جواب السؤال الأول : (أ) لدينا :

$$I_1 = \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{dx}{x^2+1} - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$ **24**

أربع درجات

2

$$= \arctan x - \int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$$

ولكن من المعلوم أن :

2 $$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\left[(2n-3)I_{n-1} + \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}}\right]$$

وعليه فإن التكامل : $\int \frac{dx}{(x^2+1)^2}$

نحكم حسابه وفق القانون السابق حيث أن : $a = 1$ و $n = 2$ وبالتعويض نحصل على :

$$\int \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2(1)^2(2-1)}\left[(4-3)I_1 + \frac{x}{x^2+1}\right] = \frac{1}{2}\left[\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right]$$

وأخيراً :

3 $$I = \arctan x - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} + c$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x - \frac{1}{2}\frac{x}{(x^2+1)} + c$$

(ب) إن الدالة المكاملة معرفة على الفترة $[-a, +a]$ لنفرض $x = \varphi(t) = a\sin t$

2 حيث $a > 0$, $t \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ عندئذ

$dx = a\cos t$; $\sqrt{a^2-x^2} = a\sin t$

وبالتالي يكون :

2 $$I_2 = \int a^2\cos^2 t = \frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{\sin 2t}{2}\right) + c$$

ولكن :

$\sin t = \frac{x}{a} \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{a}$; $\cos t = \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$

2 $\frac{1}{2}\sin 2t = \sin t\cos t = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{}$

وعليه فإن :

3 $$\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + c$$

نلاحظ أن :

$I_3 = \int \sqrt{3-4x^2}\, dx$

2 $I_3 = \int \sqrt{3(1-\frac{4}{3}x^2)}\, dx = \sqrt{3} \int \sqrt{1-(\frac{2}{\sqrt{3}}x)^2}\, dx$

نرمز :

$\frac{2}{\sqrt{3}} x = t$ نفرض أن ، $dt = \frac{2}{\sqrt{3}} dx \rightarrow dx = \frac{\sqrt{3}}{2} dt$

وبالتعويض بالتكامل المفروض

2 نحصل على التكامل التالي :

$I_3 = \frac{3}{2} \int \sqrt{1-t^2}\, dt = \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} \arcsin t + \frac{t\sqrt{1-t^2}}{2} \right] + c \Rightarrow$

3 $I_3 = \frac{3}{4} \arcsin \frac{2x}{\sqrt{3}} + \frac{x\sqrt{3-4x^2}}{2} + c$

جواب السؤال الثاني : حساب التكامل ، في $x>0$ $\int \frac{(\sqrt{x} - 2\sqrt[3]{x})^2}{x} dx$

ست وثلاثون نقطة $\boxed{36}$

نلاحظ أن التكامل المفروض يكتب بالصورة :

$\int x^{-1} (x^{\frac{1}{2}} - 2x^{\frac{1}{3}})^2 dx = \int x^{-\frac{1}{3}} (-2 + x^{\frac{1}{6}})^2 dx$

3 $n = \frac{1}{6}$ ، $m = -\frac{1}{3}$ ، $p = 2$

لذا نفرض أن $t = \sqrt[6]{x}$ أو $x = t^6$ ،

وبالتالي فإن ، $dx = 6t^5 dt$ وبالتعويض نحصل على :

4 $\int x^{-\frac{1}{3}} (-2 + x^{\frac{1}{6}})^2 dx = \int t^{-2} (-2+t)^2 6t^5 dt = 6 \int t^{-2} (t^2 - 4t + 4) t^5 dt =$

$= 6\int t^5 dt - 24 \int t^4 dt + 24 \int t^3 dt$

5 $= t^6 - \frac{24}{5} t^5 + \frac{24}{4} t^4 + c = x - \frac{24}{5} x^{\frac{5}{6}} + 6x^{\frac{2}{3}} + c$

الآن ، حساب التكامل : $\int \frac{e^{2x} + 3e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx$ ،

نفرض أن : $t = e^x$ فيكون : $dt = e^x dx$ أي $dx = \frac{dt}{t}$ $(t>0)$.

وبالتعويض نحصل على :

4 $\int \frac{e^{2x} + 3e^x}{\sqrt{e^{2x} + e^x + 1}} dx = \int \frac{t+3}{\sqrt{t^2+t+1}} dt = \int \frac{t+\frac{1}{2}}{\sqrt{t^2+t+1}} + \frac{5}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}}$

(3)

بالنسبة للتكامل الأول نلاحظ أن البسط هو مشتقة ما تحت الجذر بعد أن نضرب بـ 2 وتقسم على (2) وعليه فإن:

4 $$\frac{1}{2}\int \frac{t+1}{\sqrt{t^2+t+1}}\,dt = \frac{1}{2}\int \frac{d(t^2+t+1)}{\sqrt{t^2+t+1}} = \sqrt{t^2+t+1} = \sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}$$

أيضاً بالنسبة للتكامل الثاني لدينا:

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t^2+t+1}} = \int \frac{d(t+\frac{1}{2})}{\sqrt{(t+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}} = \ln\left|(t+\tfrac{1}{2})+\sqrt{t^2+t+1}\right| =$$

4 $$= \ln\left|(e^{x}+\tfrac{1}{2})+\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}\right|$$

إذن:

$$\int \frac{e^{2x}+3e^{x}}{\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}}\,dx = \sqrt{e^{2x}+e^{x}+1} + \frac{5}{2}\ln\left|(e^{x}+\tfrac{1}{2})\sqrt{e^{2x}+e^{x}+1}\right| + c$$

أيضاً بالنسبة للتكامل:

$$\int \frac{dx}{1+ch^2x}$$

نفرض أن:

$$thx = t \Rightarrow dx = \frac{dt}{1-t^2}$$

4

ومن جهة ثانية لدينا:

$$\frac{1}{ch^2x} = 1-th^2x = 1-t^2 \Rightarrow ch^2x = \frac{1}{1-t^2}$$

وبالتعويض في التكامل المفروض نجد:

5 $$\int \frac{dx}{1+ch^2x} = \int \frac{dt}{2-t^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\ln\left|\frac{thx+\sqrt{2}}{thx-\sqrt{2}}\right| + c$$

[illegible]

حل التمرين [illegible]

يمكن استخدام طريقة التكامل بالتجزئة [illegible] $\int_0^{+\infty} e^{-x}\cos x\,dx$

$f(x) = e^{-x}$

$g'(x)\,dx = \cos x\,dx \Rightarrow g(x) = \sin x$

أيضاً: $f'(x)\,dx = -e^{-x}\,dx$

وبالتعويض نجد أن:

$$\int_0^u e^{-x}\cos x\,dx = \left[e^{-x}\sin x\right]_0^u + \int_0^u e^{-x}\sin x\,dx$$

أيضاً الدالة: $f(x) = e^{-x}$ ، $g(x) = -\cos x$

[illegible] $[0, +\infty[$ [illegible]

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)\cdot g(x)\right] = -\lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x}\cos x\right) = 0$$

(الدالة محدودة [illegible])

وعليه [illegible] التكاملين:

$$\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx \ ; \ \int_0^{\infty} e^{-x}\sin x\,dx$$

[illegible]

$$\int_0^u e^{-x}\sin x\,dx = \left[-e^{-x}\cos x\right]_0^u + \int_0^u \cos x\, e^{-x}\,dx$$

وعليه فإن:

$$2\int_0^u e^{-x}\cos x\,dx = \left[e^{-x}(\sin x - \cos x)\right]_0^u$$

وبأخذ النهاية [illegible]

$$2\lim_{u\to+\infty}\int_0^u e^{-x}\cos x\,dx = \lim_{u\to+\infty}\left[e^{-u}(\sin u - \cos u)\right] + 1$$

[illegible]: $\forall u \in \mathbb{R}$; $|\cos u| \le 1$ ، $|\sin u| \le 1$

ومنه: $\int_0^{\infty} e^{-x}\cos x\,dx = \frac{1}{2}$

هذا يعني أن التكامل المعرف [illegible]

أيضاً [illegible] التكامل: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x} + 4x^3}$

الحل: [illegible] $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} + 4x^3}$ [illegible] $x = 0$

[illegible] $\forall x \in]0, 1]$; $\frac{1}{\sqrt{x} + 4x^3} \le \frac{1}{\sqrt{x}}$

ومنه:

3 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{s\to 0^+}\int_s^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{s\to 0^+}\left[2\sqrt{x}\Big|_s^1\right] = \lim_{s\to 0^+}\left[2-2\sqrt{s}\right] = 2$ فهو متقارب

وبالتالي وحسب اختبار المقارنة نجد أن التكامل المعتل المفروض متقارب وبقيمة أصغر أو تساوي 2 أي:

3 $$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+4x^2} \leq 2$$

جواب السؤال الرابع: المنحني المفروض هو الاستروئيد وهو متناظر بالنسبة لمحوري الإحداثيات ومركزه المبدأ (O) [14]

ولدينا:

$x'_t = -6\cos^2 t\sin t$

4 $y'_t = 6\sin^2 t\cos t$

وبالتعويض في التكامل:

3 $$S=\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2}(x y'_t - y x'_t)\,dt$$

حيث أن:

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[12\sin^2 t\cos^4 t+12\cos^2 t\sin^4 t\right]dt =$$

4 $$= 6\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\,dt = 6\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin 2t\right)^2 dt$$

$$= 6\int_0^{2\pi}\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{1-\cos 4t}{2}\right]dt = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 4t\right)dt$$

$$= \frac{3}{4}\left[t\Big|_0^{2\pi}\right] - \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4}\left[\sin 4t\Big|_0^{2\pi}\right] =$$

3 $$= \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$ وحدة مربعة.

أستاذ المقرر: